УДК 517.9
ББК 22.161.6

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В МОДЕЛИ ГРИНА–НАГДИ

Шантыр Антон Леонидович
Магистрант кафедры информационных систем и компьютерного моделирования
Волгоградского государственного университета
shantyr_anton@mail.ru
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, система Грина–яНагди, дисперсионное уравнение, свободная поверхность, неоднородность, линейный анализ, волновой вектор, собственная частота.

Введение. Линейный анализ уравнений в частных производных, в частности уравнений Сен–Венана и Грина–Нагди, позволяет получить дисперсионное уравнение [6]. Актуальность данной работы заключается в возможности верификации сложных моделей на основе сравнения динамики малых возмущений в различных моделях мелкой воды, применяемых для решения широкого круга задач динамики поверхностных вод [2].

Целью работы является проведение линейного анализа, вывод дисперсионных уравнений для стандартной системы уравнений Сен–Венана [6] и уравнений Грина–Нагди [1] и получение предельных решений.

Новизна данной работы заключается в обобщении стандартных уравнений мелкой воды с учетом вертикальных движений. Достоверность результатов основана на совпадении дисперсионных свойств линейных волн в длинноволновом приближении.

Полученные дисперсионные уравнения имеют практическую и научную значимость. Анализ дисперсионных соотношений для моделей Сен–Венана в первом приближении и Грина–Нагди позволяет утверждать, что обе модели удовлетворительно описывают длинноволновые движения тонкого слоя жидкости для различных приложений.

Модели и их анализ. Уравнения «мелкой воды» являются уравнениями гиперболического типа и описывают течения на твердой поверхности. Данная модель получается из полной системы уравнений Навье–Стокса [5]. Без учета сил Кориолиса и придонного трения для компонент скоростей u, v и толщины слоя жидкости h имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(hu)+\frac{\partial}{\partial y}(hv)=0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu)+\frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2+\frac{1}{2}gh^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}(huv)+gh=0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(hv)+\frac{\partial}{\partial x}(huv)+\frac{\partial}{\partial y}\left(hv^2+\frac{1}{2}gh^2\right)+gh=0. \end{cases} \quad (1)$$

После линеаризации системы (1) ищем в однородном приближении решения в виде плоских волн. В результате получаем дисперсионное уравнение, описывающее зависимость частоты ω от волнового числа k, корни которого равны (g – ускорение свободного падения):

$$\begin{cases} \omega_1=\sqrt{ghk^2}=k\sqrt{gh}, \\ \omega_2=-\sqrt{ghk^2}=-k\sqrt{gh}, \\ \omega_3=0. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим обобщенные уравнения «мелкой воды» в первом приближении. В основе вывода уравнений в первом приближении лежит разложение гидродинамических величин в ряд Тейлора [6]. Воспользуемся вертикальным профилем скорости потока с учетом его взаимодействия с дном

$$V \propto \lg(z/z_0),$$

где z – вертикальная координата, z_0 – характеризует гладкость дна. Последняя величина существенно влияет на динамику потока [6].

В основе модели сплошной среды лежат законы сохранения массы вещества, импульса и энергии. Эти уравнения необходимо дополнить уравнением состояния. Для воды хорошим приближением является закон Коула:

$$\frac{p+B}{1+B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n,$$

где p – давление, ρ_0 – плотность при атмосферном давлении, n = 7, B = 3000 атмосфер.

Перепишем уравнения Сен–Венана в первом приближении по вертикальному импульсу с учетом гидравлического трения и формулы Коула:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t} + \dfrac{1}{\ln 10}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{H^2}{z_0}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{H^2}{z_0}\right)\right] = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{H^2 u}{\ln 10 \cdot z_0}\right) + \\ + \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{gH^2}{\ln 10}\left(\lg\dfrac{H}{z_0} - \dfrac{H}{2\ln 10 \cdot z_0}\right) + gz_0 \cdot e^{\frac{H}{z_0}}(H - z_0) + gz_0^2 + \dfrac{gH^2}{2}\right] + \\ + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{gH^2}{\ln 10}\left(\lg\dfrac{H}{z_0} - \dfrac{H}{2\ln 10 \cdot z_0}\right)\right] - \dfrac{H}{\ln 10 \cdot z_0} \cdot \dfrac{gH^2}{2} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{H^2 v}{\ln 10 \cdot z_0}\right) + \\ + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{gH^2}{\ln 10}\left(\lg\dfrac{H}{z_0} - \dfrac{H}{2\ln 10 \cdot z_0}\right) + gz_0 \cdot e^{\frac{H}{z_0}}(H - z_0) + gz_0^2 + \dfrac{gH^2}{2}\right] + \\ + \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{gH^2}{\ln 10}\left(\lg\dfrac{H}{z_0} - \dfrac{H}{2\ln 10 \cdot z_0}\right)\right] - \dfrac{H}{\ln 10 \cdot z_0} \cdot \dfrac{gH^2}{2} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В приближении плоских волн получим следующие корни дисперсионного уравнения:

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{k}{H}\sqrt{2\ln 10 \cdot gz_0^2\left(z_0 + He^{H/z_0} + z_0 e^{H/z_0} + \dfrac{H^2}{2z_0} - \dfrac{H^2}{z_0 \cdot \ln 10}\right)} \\ \omega_2 = -\dfrac{k}{H}\sqrt{2\ln 10 \cdot gz_0^2\left(z_0 + He^{H/z_0} + z_0 e^{H/z_0} + \dfrac{H^2}{2z_0} - \dfrac{H^2}{z_0 \cdot \ln 10}\right)} \\ \omega_3 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для описания тонкого слоя в основном используются классические уравнения мелкой воды [2; 6]. Однако для детального анализа требуются модели, корректно учитывающие дисперсию [3]. Одним из подходов является переход от модели мелкой воды к системе уравнений Грина–Нагди [1], в которой рассматривается слой жидкости, ограниченный свободной поверхностью и непроницаемым дном, жидкость считается несжимаемой и невязкой (рис. 1).

Система уравнений Грина–Нагди для одномерного течения имеет вид [1]:

$$\begin{cases} H_t + H_x u + H u_x = 0, \\ u_{txx} + \dfrac{3H_x}{H}u_{tx} - \dfrac{3}{H^2}\left(1 + h_x^2 - h_x H_x - \dfrac{H}{2}h_{xx}\right)u_t = \\ uu_{xxx} + \left(u_x - \dfrac{3H_x}{H}u\right)u_{xx} - \dfrac{3}{2H}\left(3h_{xx}uu_x + h_{xxx}u^2\right) + \\ + \dfrac{3}{H^2}uu_x + \dfrac{3}{H^2}\left(h_x - H_x\right)\left(uu_x h_x + h_{xx}u^2 - Hu_x^2 - g\right). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь h – функция непроницаемости дна [1], H – толщина слоя жидкости. Ограничимся случаем $h(x)=0$. Записав дисперсионное уравнение, получим следующие его корни:

$$\begin{cases} \omega_1 = ku + \dfrac{8u^3k^3H}{3g}, \\ \omega_2 = 0, \end{cases}$$

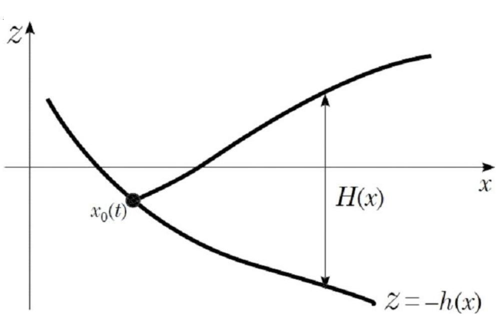

Рис. 1. Слой жидкости

где $u = \sqrt{gh}$ – фазовая скорость для плоских волн. Таким образом, окончательное решение дисперсионного уравнения для модели Грина–Нагди с плоским дном имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_1 = k\sqrt{gh} + \dfrac{8(gh)^{3/2} k^3 H}{3g}, \\ \omega_2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Если пренебречь вторым слагаемым в (6), то получим переход от модели Грина–Нагди к классической модели Сен–Венана (2), что соответствует пренебрежению вертикальными движениями [2, 6]. В этом случае имеем линейную зависимость частоты от волнового числа k, что полностью согласуется с выводами линейного анализа для классической системы уравнений Сен–Венана (рис. 2). В общем случае имеем кубическую зависимость от волнового числа в (6), что обусловлено влиянием слагаемого с третьей производной по x в (5), приводящего к дисперсии.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-01-97062 и 13-07-97056.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин, С. П. Исследование начально-краевой задачи для системы уравнений Грина. – Нагди / С. П. Баутин // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. – 2012. – №1 (13). – 13 с.

2. Воронин, А. А. Задача управления гидрологическим режимом в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС – Волго-Ахтубинская пойма». Ч. 2. Синтез системы управления / А. А. Воронин // Проблемы управления. – 2012. – № 6. – С. 19–25.

3. Ландау, Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау. – М. : Наука, 1986. – 736 с.

4. Храпов, С. С. Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного SPH-TVD-подхода / С. С. Храпов // Вычислительные методы и программирование. – 2011. – № 1. – Т. 12. – С. 282–297.

5. Храпов, С. С. Моделирование динамики поверхностных вод : монография / С. С. Храпов. – Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2010. – 132 с.

6. Khrapov, S. The Numerical Simulation of Shallow Water: Estimation of the Roughness Coefficient on the Flood Stage / S. Khrapov // Advances in Mechanical Engineering. – 2013. Vol. 2013. – Article ID 787016. – 11 p.

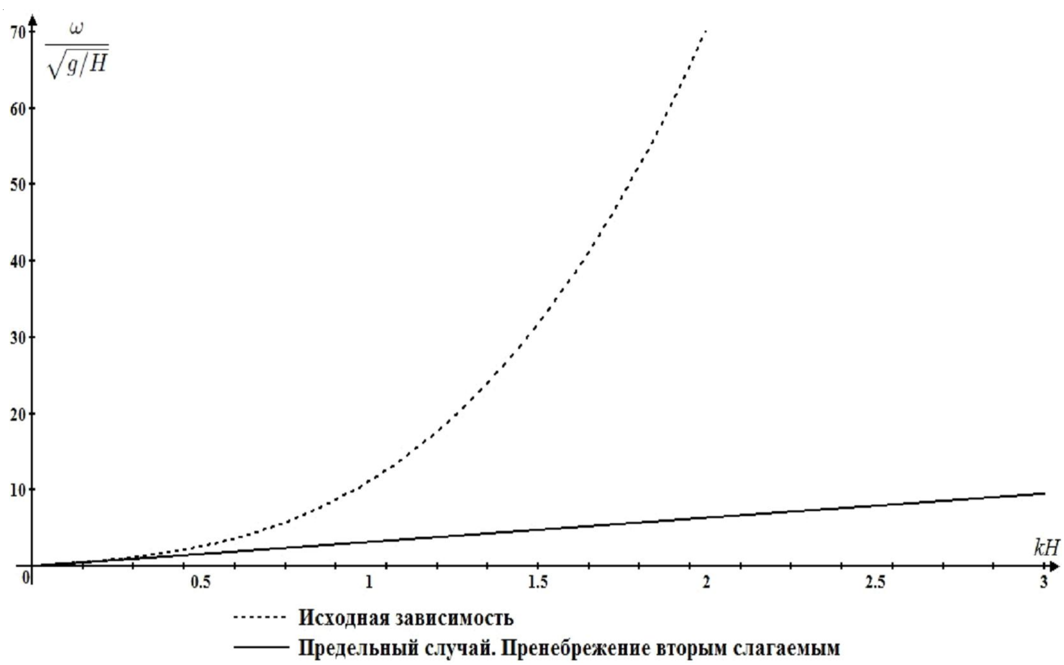

Рис. 2. Зависимость частоты от волнового вектора для системы уравнений Грина–Нагди

LINEAR ANALYSIS OF SMALL PERTURBATIONS DYNAMICS IN GREEN–NAGHDI MODEL

Shantyr Anton Leonidovich

Master Student, Information System and Computing Simulation Department,
Volgograd State University
shantyr_anton@mail.ru
Prospect Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Key words: shallow water equations, Green–Naghdi system, dispersion equation, free surface, heterogeneity, linear analysis, wave vector, eigenfrequency.